M 112

MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
ET
DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE

E.I. T.P.E. 1978

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

— OPTION M —

(temps accordé : 3 heures)

Ce problème étudie une population et son avenir en fonction de la natalité et de la mortalité.

Pour simplifier on ne considère que la population féminine.

Les trois parties du problème, notées I, II et III seront notées dans la proportion 3, 4 et 3 ; les parties II et III sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre arbitraire.

HYPOTHESES

- Chaque année t, la population féminine est représentée par un vecteur de R^{100} $\begin{pmatrix} X_0(t) \\ \vdots \\ X_{99}(t) \end{pmatrix}$ où X_i est la population ayant entre (i-1) et i ans au 1er janvier de l'année t et où X_0 est la population qui naît dans l'année t.

- Mortalité :
chaque année, la tranche d'âge $X_i(t)$ subit des pertes.
On suppose que la mortalité est fonction uniquement de i (hypothèse de stagnation des progrès de la médecine)
R_i est la proportion de la tranche $X_i(t)$ qui vivra encore l'année suivante
(on a évidemment $0 < R_i < 1$ et $R_{99} = 0$)
d'où $X_{i+1}(t+1) = R_i\, X_i(t)$.

- Natalité :
Les femmes peuvent avoir des enfants dans les tranches d'âge 15 à 44.
La moyenne des naissances pour chaque tranche d'âge est n_i
($i = 15, 16, 17, \ldots\ldots, 44$). On a évidemment $0 \leqslant n_i \leqslant 1$
(une femme ne peut pas avoir plusieurs enfants la même année)

d'où : $X_0(t+1) = \sum_{i=15}^{44} X_i(t)\, n_i$

I - Soit F l'endomorphisme de R^{100} dans R^{100} qui fait passer de X(t) à X(t+1).

1°) Ecrire la matrice M de F dans la base naturelle.

2°) Montrer que son polynôme caractéristique est :
$\lambda^{55} (\lambda^{45} - \sum_{i=15}^{44} \alpha_i\, n_i\, \lambda^{44-i})$ Si on a posé : $\alpha_i = \prod_{j=0}^{i-1} R_j$

3°) Montrer que ce polynôme a une seule racine réelle positive λ_0, et que cette racine est forcément d'ordre 1.
(on pourra poser $u = 1/\lambda$)

Quel est le vecteur propre associé ?
Montrer que la matrice M n'est pas diagonalisable.

.../...

4°) On va chercher les limites de la population quand t tend vers + ∞.
Montrer tout d'abord que pour trouver la limite de n'importe quelle tranche d'âge, il suffit de considérer les 45 premières $(X_0, X_1 \ldots\ldots X_{44})$, et que les autres en découlent.

Dans la suite, on ne considèrera plus que les 45 premières tranches d'âge, donc l'espace R^{45}.

5°) Montrer que si $\sum_{i=15}^{44} \alpha_i n_i > 1$, et si la population de départ est non nulle *, la population de chaque tranche d'âge $X_j(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$.

Pour cela on pourra :

- montrer qu'il existe T_o tel que $X_o(T_o) > 0$
- en déduire qu'il existe T tel que $X_j(T+T_o) > 0 \qquad \forall j = 0,1,\ldots\ldots,44$
- montrer que $Y(t) \leqslant X(t) \Longrightarrow Y(t+1) \leqslant X(t+1)$**
- en déduire la démonstration.

6°) Montrer que si $\sum_{i=15}^{44} \alpha_i n_i < 1$, la population va inévitablement vers l'extinction.

II - CAS $\sum_{i=15}^{44} \alpha_i n_i = 1$.

Il s'agit de démontrer que quelque soit la population de départ, la population tend vers un équilibre quand t tend vers + ∞.

1°) Montrer qu'il existe une base de R^{45} sur laquelle F est représenté par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

où M' est une matrice 44 × 44

Quel est le polynôme caractéristique de M' ?

2°) On plonge R^{45} dans $\mathbb{C}^{45}$ (on peut considérer les coefficients de M' comme des complexes). Le polynôme caractéristique de M' a alors 44 racines, simples ou multiples dans $\mathbb{C}$ (ceci découle du fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos). Montrer que toutes ces racines sont de module inférieur à 1.

3°) On admettra que toute matrice A de $\mathbb{C}^{44}$ est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & B_n \end{bmatrix}$$

où chaque B_i a la forme $\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$

et où les λ_i sont des racines du polynôme caractéristique de A.

N.B. : le changement de base associé n'est pas forcément un changement de base orthonormé.

.../...

---

* Une population non nulle vérifie : $X_j \geqslant 0 \ \forall j$, et $\exists j$ tel que $X_j > 0$.

** On dit que : $X \leqslant Y$ si $\forall j \in [0,1,\ldots\ldots,44] \ X_j \leqslant Y_j$

En conclure qu'il existe une base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{44})$ de $\mathbb{C}^{45}$ sur laquelle F est représenté par :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & B_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & B_n \end{bmatrix}$$

les B_i étant de la forme ci-dessus.

Quel est le vecteur ε_0 ?

4°) Calculer la puissance $n^{ième}$ de B. Calculer $\lim_{n \to +\infty} B^n$

5°) En déduire $\lim_{n \to +\infty} M^n(X)$

Pour cela :

- on notera $(X_0, X_1, \ldots, X_{44})$ les coordonnées de X dans la base naturelle, et $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{44})$ ses coordonnées dans la base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{44})$
- on posera $G(X) = X - F(X)$

Quelle est la dimension de l'image de G ?

Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{44})$ est une base de l'image de G (notée Im(G)).

- écrire G(X) dans la base naturelle
  en déduire les coordonnées d'un vecteur Z orthogonal à Im(G)
- poser $X = Y_0 \varepsilon_0 + X'$ avec $X' \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{44})$
  trouver Y_0 à partir des points précédents.

6°) En déduire $\lim_{t \to +\infty} X(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} X_i(t)$ $\quad i = 0, 1, 2, \ldots, 99$

Conclure.

III - EXEMPLE *

On veut représenter les α_i par une expression de la forme :

$$\alpha_i(\beta) = (1 + \beta i)\, e^{-\beta i} \quad \text{avec} \quad \beta > 0 \quad \text{et} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 99.$$

1°) α_i satisfait-il aux conditions du I ?

2°) Posons $EV(\beta) = \sum_{i=0}^{99} \alpha_i(\beta)$

On dira que $EV(\beta)$ est l'espérance de vie d'un enfant à sa naissance.
Montrer que EV vérifie :

$EV(0) = 100$; $EV'(0) = 0$; EV décroissante et tend vers 0 quand β tend vers $+\infty$.

.../...

* L'important n'est pas ici d'arriver au résultat, mais de trouver des méthodes simplifiant au maximum les calculs. (On peut éviter de calculer des exponentielles si en utilise toujours les fonctions g et g^{-1}).

3°) Montrer que si f est une fonction continue strictement décroissante, et n un entier positif on a :

$$\int_0^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{i=o}^{n} f(n) \leqslant f(0) + \int_0^{n} f(t)\,dt$$

En déduire un encadrement de $EV(\beta)$ de la forme :

$\psi_1(\beta) \leqslant EV(\beta) \leqslant \psi_2(\beta)$ où l'on calculera $\psi_1(\beta)$ et $\psi_2(\beta)$.

Calculer $\psi_2(\beta) - \psi_1(\beta)$ et trouver $\sup_{\beta \in R^+} (\psi_2(\beta) - \psi_1(\beta))$.

4°) Donner des encadrements de β_1 et β_2 correspondants à une espérance de vie de 30 ans (au 16e siècle) et 72 ans (au 20e siècle), en utilisant 3°) et les fonctions $g(t) = \frac{1}{t}(2 - (2+t)e^{-t})$ et g^{-1}

pour lesquelles des valeurs sont données en annexe.

5°) Supposons n_i constant et égal à n.
Le nombre moyen de filles qu'aura eues une femme qui a atteint l'âge de 46 ans est :

$$N = \sum_{i=15}^{44} n_i = 30\,n$$

Utiliser une méthode analogue à celle de 3°) det 4°) pour encadrer les valeurs de $\sum_{i=15}^{44} \alpha_i$ (toujours à l'aide des valeurs données de g et g^{-1}).

En déduire le nombre moyen de filles qu'aura mis au monde une femme de 46 ans dans le cas où la population est en équilibre** dans les deux exemples (16e et 20e siècles).

Conclure.

ANNEXE :

Valeurs de g^{-1} :

u	$g^{-1}(u)$	u	$g^{-1}(u)$	u	$g^{-1}(u)$	u	$g^{-1}(u)$
0,9	0,977	0,72	2,058	0,55	3,273	0,32	6,198
0,8	1,575	0,71	2,121	0,45	4,246	0,31	6,407
0,75	1,879	0,70	2,184	0,35	5,636	0,30	6,629
0,73	1,996	0,65	2,515	0,33	6,000	0,29	6,865

Valeurs de g :

t	g(t)	t	g(t)	t	g(t)
0,28	0,989	0,90	0,912	2,00	0,797
0,30	0,987	0,92	0,909	2,70	0,624
0,32	0,985	0,94	0,906	2,80	0,610
0,50	0,965	0,96	0,903	2,90	0,597
0,86	0,918	1,00	0,896	3,00	0,584

-FIN-

** Ceux qui n'ont pas encore fait la IIème partie admettront la condition d'équilibre : $\sum_{i=15}^{44} \alpha_i > 1$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail